Einführung in die Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Über stetige lineare Abbildungen zwischen normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen)**.**

(i) Seien V, W normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Beweise, daß dann die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent sind:

(1) f ist stetig

(2) f ist stetig in 0_V

(3) $\exists_{C\in\mathbb{R}}\forall_{v\in V}\ \|f(v)\| \leq C\|v\|$

(ii) Sei $V := \mathrm{C}^0([a,b])$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige zunächst, daß durch $\forall_{f\in V}\ \|f\|_* := \int_a^b |f(t)|dt$ eine Norm für V definiert wird. Beweise dann, daß $L\colon (V, \| \|_*) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(\frac{a+b}{2})$, eine lineare Abbildung ist, die nicht stetig ist.

Aufgabe 2. Beweise Satz 1.16 der Vorlesung.

Aufgabe 3. Wir erinnern an unsere Vereinbarung, wonach wir $\mathbb{R}^n$ als topologischen Raum mit der durch die Maximumsnorm induzierten Topologie und alle Teilmengen $N \subset \mathbb{R}^n$ als topologische Räume mit der entsprechenden Teilraumtopologie betrachten.

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, heißt $S^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \ldots x_n^2 = 1\}$ die *Standard* $(n-1)$*-Spähre.*
Zeige, daß die *antipodische Abbildung* $a\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_n)$, stetig ist.

(ii) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ heißt *Ellipsoid.* Zeige, daß $f\colon S^2 \to E$, $(x,y,z) \mapsto (ax, by, cz)$, ein Homöomorphismus ist.

(iii) Finde einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1 \times \mathbb{R}$ der *gelochten Ebene* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ auf den *Zylinder* $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (Beispiele zur Kompaktheit)**.** Beweise die folgenden Aussagen:

(i) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ ist eine nicht-kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(ii) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(iii) $\widehat{\mathbb{R}}$ ist ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathbb{R}$ ist topologischer Teilraum von $\widehat{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 5. Zeige, daß $\mathrm{Graph}\big(\sin(\frac{1}{x})|_{\mathbb{R}_+}\big) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, die nicht wegzusammenhängend ist.

Besprechung: Dienstag, den 17.11.2009